

文章编号: 1000-7598 (2011) 04-1149-08

节理泊松圆盘模型直径分布推断的解析方法

张国强^{1,2}, 费文平^{1,2}, 张 茹^{1,2}, 邓建辉^{1,2}

(1. 四川大学 水力学与山区河流开发保护国家重点实验室, 成都 610065; 2. 四川大学 水利水电学院, 成都 610065)

摘 要: 节理圆盘直径分布是节理网络模拟中的重要参数之一。在节理为 Poisson 圆盘的假设下, 根据三维齐次 Poisson 点过程的数学特征, 给出迹长分布概率密度函数的多项式形式和相应的约束条件; 对 Warburton 提出的迹长分布概率密度函数和节理直径分布概率密度函数关系公式进行 Santalo 变换, 推导了多项式形式的迹长分布所对应的直径分布概率密度函数的解析解, 并采用 Priest 给出的解析解验证其正确性; 根据概率密度函数的性质, 给出了直径分布概率密度函数定义域的推断方法。编制节理网络模拟程序, 采用 Monte Carlo 方法验证节理 Poisson 圆盘直径分布概率密度函数解析解的正确性和直径分布概率密度函数定义域推断方法的适用性。

关 键 词: 节理网络; 节理 Poisson 圆盘模型; 节理直径分布; 解析方法

中图分类号: TU 45; O 211.6

文献标识码: A

Analytical method for estimating diameter distribution of Poisson disc joint model

ZHANG Guo-qiang^{1,2}, FEI Wen-ping^{1,2}, ZHANG Ru^{1,2}, DENG Jian-hui^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Hydraulics and Mountain River Engineering, Sichuan University, Chengdu 610065, China;

2. School of Water Resources and Hydropower, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

Abstract: One of the key procedures in statistical joint modeling is the determination of the joint size distribution. The mathematical features of the Poisson point process was considered. When the joint diameter distribution is continuous, the trace length lower bound must be zero; and the upper bound must be equal to the joint diameter upper bound. Since any continuous function could be fitted by a polynomial with high accuracy, a polynomial trace length distribution and constraints were proposed in the infinite sampling window for the Poisson disc joint model. Santalo closed-form integral solution was used to derive a closed-form expression for the equation, which determined the trace length distribution from the joint diameter distribution proposed by Warburton. Based on the polynomial trace length distribution, an analytical equation was derived to estimate the joint diameter distribution, and the complex numerical methods were avoided. The analytical equation was verified by the formula proposed by Priest. Based on the characteristic of the probability density function, a method for estimation of diameter distribution range was proposed, and the joint diameter lower bound was inferred by small step search algorithm. The inference method was checked for validity through Monte Carlo simulation.

Key words: joint network; Poisson disc joint model; joint diameter distribution; analytical method

1 引 言

节理网络模拟在块体稳定分析、岩体渗流特性以及表征单元体 REV 的研究中占有重要地位, 对节理的空间形状和空间尺度的假设在节理网络模拟中显得尤为重要。目前广为应用的是 Baecher^[1]提出的 Poisson 圆盘模型。该模型认为节理是空间的圆盘, 且圆盘中心是三维齐次 Poisson 点过程; 节理形状为圆形假设是依据 Robertson^[2]和 Barton^[3]在不同露

头上对结构面的调查, 发现有相同的迹长特征; 圆盘中心是三维齐次 Poisson 点过程的假设是基于体视学^[4]的观点, 即模拟区域采用 Poisson 圆盘模型时, 测窗平面切割该区域, 测窗内的节理间距应服从负指数分布, Baecher、Snow、Priest、Hudson, Ca11 和 Einstein 从现场间距的调查证实了该观点^[5]。

Warburton^[4]在平行的 Poisson 圆盘假设下, 推导了无限测窗下的迹长分布概率密度函数与圆盘直径分布概率密度函数关系的公式 (以下简称

收稿日期: 2010-09-20

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(No. 2010CB226802, No. 2010CB732005); 国家自然科学基金项目(No. 50639100, No. 509794091)。

第一作者简介: 张国强, 男, 1981 年生, 在读博士研究生, 主要从事岩体数值计算方面的研究工作。E-mail: vipzgq@sina.com

Warburton 公式),使得采用节理 Poisson 圆盘模型来模拟多组平行或近似平行的节理时,需要获得无限测窗下的迹长分布概率密度函数。Song^[6]在 Warburton 假设的基础上给出了由测窗面样本推断无限测窗下迹长分布概率密度函数的方法和公式;进而节理圆盘直径分布概率密度函数在理论上可由 Warburton 公式来获得。

Song^[6-7]和梅涛^[8]采用数值方法离散 Warburton 公式获取直径分布概率密度函数的数值解。Tonon^[9]将迹长分布概率密度函数假设为均匀分布,指数分布等经典的分布函数,采用 Santalo 变换,推导了对应的直径分布概率密度函数的解析解,然而实际的迹长分布概率密度函数也不全是经典的分布,并且在对获得的直径分布概率密度函数定义域的具体推断研究方面存在不足。

本文针对这个问题,根据三维齐次 Poisson 点过程的数学特征,在直径分布概率密度函数连续的假设下,给出了迹长分布概率密度函数的约束条件;由于任何连续的函数都可采用多项式来拟合,故将迹长概率密度函数简化为一般意义上的多项式形式,该形式可较好地拟合现场获得的直方图数据;采用 Santalo 变换,推导了多项式形式的迹长分布概率密度函数所对应的直径分布概率密度函数的解析解,并采用 Priest 给出的解析解进行验证;根据概率密度函数的性质,给出直径分布概率密度函数定义域的推断方法。采用 Monte Carlo 模拟技术,编制了基于 Matlab 平台的节理网络工具箱 RJNS^{3D},利用 RJNS^{3D} 验证本文提出的直径分布概率密度函数解析解和直径分布概率密度函数定义域推断方法的适用性,并对研究中存在的问题进行讨论。由于节理网络模拟是与研究尺度有关的问题,本文不对单位进行标定。

2 无限测窗下的迹长分布概率密度函数数学形式的选择

Warburton^[4]在平行的 Poisson 圆盘假设下,提出了无限测窗下的迹长分布概率密度函数与圆盘直径分布概率密度函数关系的公式,即 Warburton 公式:

$$h_A(y) = \frac{y}{m} \int_y^\xi \frac{g(x)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx \quad (1)$$

式中: ξ 为节理 Poisson 圆盘的最大直径; $g(x)$ 为圆盘直径分布概率密度函数; $m = \int_0^\infty xg(x)dx$, 为直径分布概率密度函数的均值; $h_A(y)$ 为无限测窗下的迹长分布概率密度函数。

假设节理为 Poisson 圆盘,迹长即为圆盘与测窗相交的弦长,故对于任何连续的直径分布概率密度函数,由于三维齐次 Poisson 点过程是各向同性的^[5,10],在无限测窗下的迹长必在 $[0, \xi]$ 区间内,所以对于任何连续的 Poisson 圆盘直径分布概率密度函数,其对应的迹长分布概率密度函数 $h_A(y)$ 的定义域为: $y \in [0, \xi]$, 并且区间的两个端点是 $h_A(y)$ 的两个 0 点。

由于概率密度函数可由统计直方图拟合获得,且多项式可较好地统计直方图进行拟合,故将 $h_A(y)$ 假设为 n 次多项式形式并满足一定的约束条件,其中 a_k 为多项式系数。

$$h_A(y) = \sum_{k=1}^n a_k y^k \quad (2)$$

$$h_A(\xi) = 0, h'_{A+}(0) > 0, h'_{A-}(0) < 0$$

3 直径分布概率密度函数的推断方法

3.1 直径分布概率密度函数解析公式的推导

利用 Santalo^[9]变换,给出了 Warburton 公式的 Abel 类型积分方程的形式:

$$g(x) = \frac{-2mx}{\pi} \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}} \left[\frac{h_A(y)}{y} \right]' dy \quad (3)$$

令 $I(y) = h_A(y)/y$, 利用 Deutsch^[11]的分布积分变换方法,

$$g(x) = \frac{-2mx}{\pi} \int_x^\xi \frac{I'(y)}{\sqrt{y^2 - x^2}} dy =$$

$$\frac{-2mx}{\pi} \left\{ [I(\xi) - I(x)](\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \int_x^\xi [I(y) - I(x)]y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} \quad (4)$$

将式 (2) 代入 $I(y) = h_A(y)/y$, 再将 $I(y)$ 代入式 (4) 大括号内的第 2 项:

$$\int_x^\xi [I(y) - I(x)]y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy =$$

$$\int_x^\xi \left[\frac{h_A(y)}{y} - \frac{h_A(x)}{x} \right] y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy =$$

$$\sum_{k=1}^n \int_x^\xi a_k (y^{k-1} - x^{k-1}) y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy$$

令 $u = \sqrt{y^2 - x^2}$, 对式 (5) 展开并分项推导,

$$\int_x^\xi a_k y^k (y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy =$$

$$\int_x^\xi a_k y^{k-1} y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy =$$

$$\frac{-a_k y^{k-1}}{u} \Big|_x^\xi + \int_x^\xi \frac{a_k (k-1) y^{k-2}}{u} dy$$

$$\int_x^\xi a_k x^{k-1} y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy = -\frac{a_k x^{k-1}}{u} \Big|_x^\xi \quad (7)$$

由式(6)、(7)得

$$\int_x^\xi a_k(y^{k-1} - x^{k-1})y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}}dy = -\frac{a_k(\xi)^{k-1}}{u|_\xi} + \frac{a_k(x)^{k-1}}{u|_\xi} + \int_x^\xi \frac{a_k(k-1)y^{k-2}}{u}dy \quad (8)$$

式(8)消除了式(7)积分下限的奇异, 将其代入式(4), 有

$$g(x) = \frac{-2mx}{\pi} \int_x^\xi \frac{I'(y)}{\sqrt{y^2 - x^2}} dy = \frac{-2mx}{\pi} \left\{ \left[\sum_{k=1}^n a_k \xi^{k-1} - \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \right] (\xi^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \int_x^\xi \left[\sum_{k=1}^n a_k y^{k-1} - \sum_{k=1}^n a_k x^{k-1} \right] y(y^2 - x^2)^{-\frac{3}{2}} dy \right\} = \frac{-2mx}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \int_x^\xi \frac{a_k(k-1)y^{k-2}}{u} dy \right] \quad (9)$$

式中: $\int_x^\xi \frac{y^{k-2}}{u} dy$ 的递推关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \int_x^\xi \frac{y^{k-2}}{u} dy &= \frac{\xi^{k-3} \sqrt{\xi^2 - x^2}}{k-2} + \frac{x^2(k-3)}{k-2} \int_x^\xi \frac{y^{k-4}}{u} dy \\ \int_x^\xi \frac{y}{u} dy &= u|_\xi, k \text{ 为奇数} \\ \int_x^\xi \frac{1}{u} dy &= \ln \left(\frac{\xi - u|_\xi}{x} \right), k \text{ 为偶数} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(9)给出了多项式形式的迹长分布概率密度函数对应的直径分布概率密度函数的解析解。由于多项式可在一定的精度内拟合迹长统计直方图或者任意的连续分布, 较 Tonon^[9]采用列举迹长分布为一些经典的分布而求解出直径分布概率密度函数的方法有较好的一般性。

3.2 直径分布概率密度函数定义域的推断

无限测窗下的迹长分布概率密度函数可由 Song^[6]的方法获得, 即式(9)中 a_k 是可以确定的; 对于直径分布的均值 m 和直径分布概率密度函数定义域的推断则需要利用概率密度函数的性质和推导的直径分布解析解的数学特征。

设 ξ_0 是未知的直径分布概率密度函数定义域的下界, 且 $\xi_0 < \xi$; ξ 是 Poisson 圆盘的最大直径, 即直径分布概率密度函数定义域的上界, 也是无限测窗下的迹长分布概率密度函数定义域的上界。

设定 ξ_0 一个初值, 令 $g(x) = mg^*(x)$, 由式(9)得

$$g^*(x) = \frac{-2x}{\pi} \left[\sum_{k=1}^n \int_x^\xi \frac{a_k(k-1)y^{k-2}}{u} dy \right] \quad (11)$$

利用概率密度函数的性质有

$$\int_{\xi_0}^\xi g(x) dx \equiv m \int_{\xi_0}^\xi g^*(x) dx \equiv 1 \quad (12)$$

根据式(12), m 值可由下式计算得出:

$$m = \frac{1}{\int_{\xi_0}^\xi g^*(x) dx} \quad (13)$$

根据式(13)计算出 m 值, 代入式(9), 根据均值的定义

$$m_c = \int_{\xi_0}^\xi xg(x) dx \quad (14)$$

若 ξ_0 是直径分布概率密度函数定义域的下界, 则 $m_c = m$, 反之则不相等; 故 ξ_0 可从略小于 ξ 的值开始搜索, 直至 $|m_c - m|$ 的误差值不再增加为止。

根据以上论述, 具体的推断步骤如下:

(1) 在已知无限测窗下的迹长分布概率密度函数为 n 次多项式形式时, 根据式(9), 计算直径概率密度函数的解析形式;

(2) 设定固定的搜索步长或依据收敛的情况设置变步长 δ , 第 i 步的直径分布概率密度函数定义域的下界记为

$$\xi_0 = \xi - i\delta \quad (15)$$

(3) 根据式(13)和式(14), 计算第 i 步的 m^i 和 m_c^i 值, 定义误差量为 e , 则第 i 步的误差量为 $e_i = |m^i - m_c^i|$, 如果 $e_i < e_{i-1}$, 重复步骤(2), 反之, 停止迭代, $\xi_0 = \xi - (i-1)\delta$ 即为直径概率密度函数定义域的下界。

3.3 Priest 解析解的算例验证

Priest^[12]给出节理直径概率密度函数 $g(x)$ 服从 $x \in [0, \xi]$ 均匀分布时的迹长分布概率密度函数的解析解为

$$h_A(y) = \frac{2y}{\xi^2} \left[\ln \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - y^2} \right) - \ln y \right], \quad (16)$$

$$0 < y \leq \xi$$

式中: ξ 为无限测窗下的最大迹长, 即 Poisson 圆盘的最大直径。

将此解析解采用最佳平方逼近的方法^[13], 获得多项式形式的表达; 采用本文推导的解析解来推断 $g(x)$ 是否服从 $x \in [0, \xi]$ 的均匀分布, 以此来验证本文推导的解析解的正确性。

根据以上论述, 设定 $\xi = 8$, 给出式(16)的 18 次多项式的最佳平方逼近, 见式(17)。绘制最佳平方逼近的多项式分布曲线与式(16)的理论分

布曲线, 见图 1。

$$\begin{aligned}
 h(y) = & -3.19 \times 10^{-10} y^{18} + 2.24 \times 10^{-8} y^{17} - \\
 & 7.24 \times 10^{-7} y^{16} + 1.42 \times 10^{-5} y^{15} - 1.9 \times 10^{-4} y^{14} + \\
 & 1.82 \times 10^{-3} y^{13} - 0.013 y^{12} + 0.069 y^{11} - 0.288 y^{10} + \\
 & 0.903 y^9 - 2.16 y^8 + 3.87 y^7 - 5.15 y^6 + 4.94 y^5 - \\
 & 3.32 y^4 + 1.52 y^3 - 0.486 y^2 + 0.192 y
 \end{aligned}
 \quad (17)$$

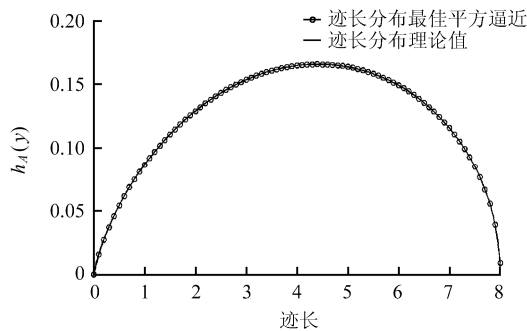


图 1 迹长概率密度函数的最佳平方逼近
Fig.1 Best least-squares polynomial interpolation approximation of trace length distribution

根据式 (9) 计算出直径分布概率密度函数的解析形式, 见式 (18):

$$\begin{aligned}
 g(x) = & 0.318x[9.64x^2 \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) - \\
 & 0.01x^{10} \sqrt{64 - x^2} - 4.21x^2 \sqrt{64 - x^2} - \\
 & 0.001x^{12} \sqrt{64 - x^2} + 18.6x^4 \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) - \\
 & 2.42x^6 \sqrt{64 - x^2} - 6.37x^4 \sqrt{64 - x^2} + \\
 & 0.067x^{10} \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) + 1.36x^8 \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) - \\
 & 9.64x^2 \ln x - 0.952 \ln x - 0.276x^8 \sqrt{64 - x^2} - \\
 & 0.202 \times 10^{-6} x^{14} \sqrt{64 - x^2} + 0.001 1x^{12} \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) + \\
 & 0.435 \times 10^{-5} x^{14} \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) + \\
 & 9.05x^6 \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) + 0.204 \times 10^{-8} \\
 & x^{16} \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) - 1.36x^8 \ln x - 0.435 \times 10^{-5} \\
 & x^{14} \ln x - 0.001 1x^{12} \ln x - 9.05x^6 \ln x + \\
 & 0.952 \ln(8 + \sqrt{64 - x^2}) + 0.511 \sqrt{64 - x^2} - \\
 & 18.6x^4 \ln x - 0.067x^{10} \ln x - 0.204 \times 10^{-8} x^{16} \ln x]
 \end{aligned}
 \quad (18)$$

绘制推断的直径分布概率密度函数曲线与理论的正态分布曲线, 见图 2。由图可直观看本文推导解析解的正确性。

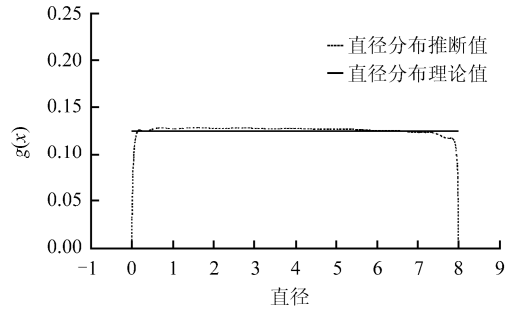


图 2 直径概率密度函数的解析逼近
Fig.2 Rational function approximation of diameter distribution

4 Monte Carlo 模拟验证

4.1 节理网络模型的选择

为验证本文提出的直径分布解析解和直径分布定义域的推断方法的适用性, 利用 Monte Carlo 模拟技术^[14-15], 开发了基于 Matlab 平台的节理网络模拟工具箱 RJNS^{3D}; 假设节理为平行的 Poisson 圆盘模型^[4], 设定节理的体积密度和直径分布概率密度函数^[16], 生成单组或者多组平行节理, 并将本文提出的直径分布解析解和直径分布定义域的推断方法编制成相应的函数, 置于 RJNS^{3D} 中。利用 RJNS^{3D}, 生成的节理网络模型见图 3。

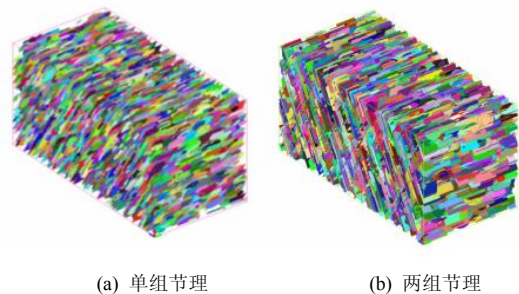


图 3 节理网络模型
Fig.3 Models of joint network

利用 RJNS^{3D}, 采用两个模拟算例, 即推断的直径分布分别为均匀分布和正态分布。均匀分布是在定义域端点处存在间断点的分布, 正态分布是连续的分布, 以此作为直径连续型分布函数的两个典型算例。模拟参数见表 1。

表 1 RJNS^{3D} 模拟参数表
Table 1 Parameters for simulation using RJNS^{3D}

算例	节理		直径概率密度函数				测窗		模拟区域体积
	产状	体积密度	分布类型	均值	区间	标准差	尺寸	产状	
1	0°/60°	0.25	均匀分布	10	[4,16]	2.309 4	72×36	90°/90°	80×40×40
2	0°/60°	0.25	正态分布	10	[4,16]	1.200 0	72×36	90°/90°	80×40×40

注: 正态分布概率密度函数的定义域是 $[-\infty, +\infty]$, 在 $[\mu - 5\sigma, \mu + 5\sigma]$ 区间内积分的为 0.999 9, 故以此区间作为直径分布概率密度函数可推断的定义域。

4.2 迹长概率密度函数的获得

在 Warburton^[4]平行 Poisson 圆盘的假设下, Song^[6]利用矩形测窗见图 4, 建立测窗内未删节迹长分布概率密度函数与无限测窗下的迹长分布概率密度函数的关系公式,

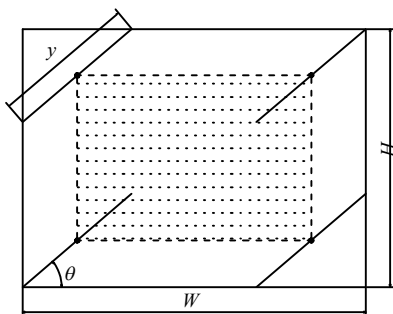


图 4 矩形测窗下未删节的迹长

Fig.4 Traces with both ends observable in a rectangular sampling window

$$h_A(y) = \frac{N^c}{\lambda(ay^2 + by + c)} h_A^c(y) \quad (19)$$

式中: $a = \cos\theta \sin\theta$, $b = -W \cos\theta - H \sin\theta$; $c = WH$; θ 为迹线和测窗水平边界的夹角; N^c 为测窗内未删节迹长的个数; $h_A^c(y)$ 是测窗内未删节迹长分布概率密度函数, 可根据测窗内的未删节迹长直方图拟合获得; λ 是迹线中点面密度, 由 Mauldon^[17]给出的估计公式求出,

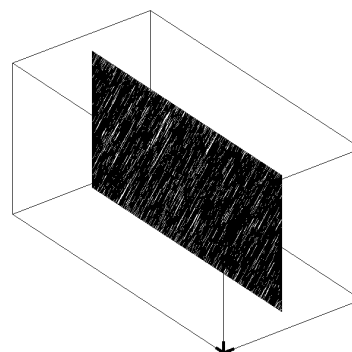
$$\lambda = \frac{N^d + 2N^c}{2WH} \quad (20)$$

式中: N^d 为测窗内一端可见迹线的个数。

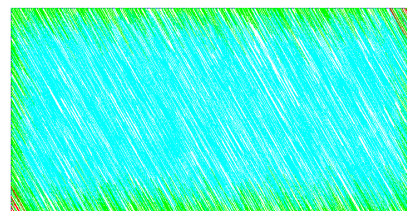
表 1 中设定较大的测窗尺度, 使测窗涵盖无限测窗下的最大迹长, 即直径分布定义域的上界; 依据式 (19) 可获得完整的迹长分布概率密度函数。在此情况下, $h_A^c(y)$ 和 $h_A(y)$ 有相同的定义域, 否则获得的无限测窗下的迹长分布概率密度函数是不完全的, 这里不考虑截断误差的影响; 由于节理是相互平行的, 不需要考虑产状的校正。测窗的布置和测窗内的迹线如图 5 所示。

测窗内的未删节迹长分布概率密度函数可由测窗内的未删节迹长统计直方图获得, 设测窗内未删节迹长直方图的第 i 个分组区间 $(y_i, y_i + \Delta y)$ 的样本个数为 N_i^c , 对式 (19) 在此区间内进行积分:

$$\int_{y_i}^{y_i + \Delta y} h_A(y) dy = \int_{y_i}^{y_i + \Delta y} \frac{N_{all}^c}{\lambda_a(ay^2 + by^2 + c)} h_A^c(y) dy \quad (21)$$



(a) 测窗的空间位置



(b) 测窗内的迹线

图 5 测窗的布置图

Fig.5 Location of sampling window

对式 (21) 利用中矩形公式^[13], 给出无限测窗下的迹长分布概率密度函数对应分组的组中值,

$$h_A(y_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{N_{all}^c h_A^c(y_{i+\frac{1}{2}}) \Delta y}{\lambda[a(y_{i+\frac{1}{2}})^2 + b(y_{i+\frac{1}{2}}) + c]} \quad (22)$$

在第 i 个分组区间 $(y_i, y_i + \Delta y)$ 上, 对测窗内的迹长分布概率密度函数进行积分并利用中矩形公式, 有

$$\int_{y_i}^{y_i + \Delta y} h_A^c(y) dy \approx h_A^c(y_{i+\frac{1}{2}}) \Delta y \approx \frac{N_i^c}{N_{all}^c} \quad (23)$$

由式 (22) 和式 (23) 得出无限测窗下的迹长分布概率密度函数对应分组的组中值,

$$h(y_{i+\frac{1}{2}}) \approx \frac{N_i^c}{\lambda[a(y_{i+\frac{1}{2}})^2 + b(y_{i+\frac{1}{2}}) + c] \Delta y} \quad (24)$$

根据测窗内未删节迹长统计直方图, 采用式 (24) 计算出无限测窗下的迹长分布概率密度函数的离散值, 改变 Δy 可获得较多的迹长分布离散值; 采用最小二乘法对这些离散值进行拟合来获得无限测窗下的迹长分布概率密度函数。

根据表 1 设定的模拟参数, RJNS^{3D} 的模拟结果见表 2。

表 2 RJNS^{3D} 模拟结果表

Table 2 Values of simulation using RJNS^{3D}

算例	函数分布	节理数量	直径最小值	直径最大值	迹线数量	迹长最小值	迹长最大值
1	均匀分布	32 000	4.000	15.999	4 878	0.008 5	15.996
2	正态分布	32 000	4.942	14.497	5 021	0.001 0	13.197

从表 2 所列的测窗内未删节迹长统计结果可以看出, 模拟算例 1、2 的最小迹长接近 0, 最大迹长接近模拟区域内 Poisson 圆盘直径的最大值, 模拟的结果验证了本文第 2 节对无限测窗下的迹长分布概率密度函数的数学特征分析是正确的。

将获得的测窗内未删节迹长数据划分为 8~20 组, 利用式 (24) 计算出无限测窗下的迹长概率密度函数离散值; 迹长分布概率密度函数采用式 (2) 的形式, 调用 RJNS^{3D} 中的最小二乘拟合函数, 给出模拟算例 1、2 拟合的多项式形式的概率密度函数, 见式 (25) 和式 (26)。

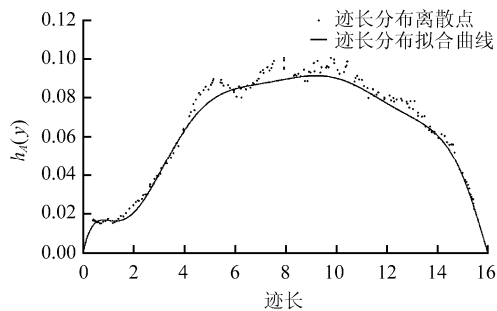
$$h_A(y) = 10^{-2}y(y-15.996)(-0.379+0.478y - 0.27y^2 + 0.712y^3 \times 10^{-1} - 0.101 \times 10^{-1}y^4 + 0.791 \times 10^{-3}y^5 - 0.324 \times 10^{-4}y^6 - 0.538 \times 10^{-6}y^7) \quad (25)$$

式 (25) 为模拟算例 1 在无限测窗下的迹长分布概率密度函数的拟合式。

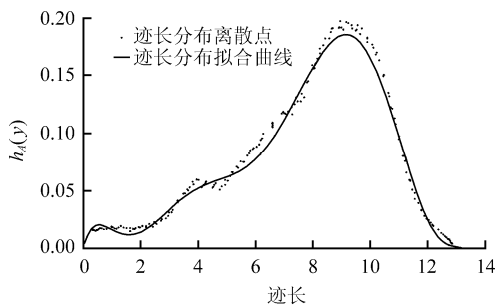
$$h_A(y) = 10^{-2}y(y-13.197)(-0.684+0.997y - 0.582y^2 + 0.157y^3 - 0.213 \times 10^{-1}y^4 + 0.139 \times 10^{-2}y^5 - 0.344 \times 10^{-4}y^6) \quad (26)$$

式 (26) 为模拟算例 2 在无限测窗下的迹长分布概率密度函数的拟合式。

绘制无限测窗下的迹长分布概率密度函数的离散点和拟合的多项式形式的概率密度函数曲线, 见图 6。



(a) 模拟算例 1

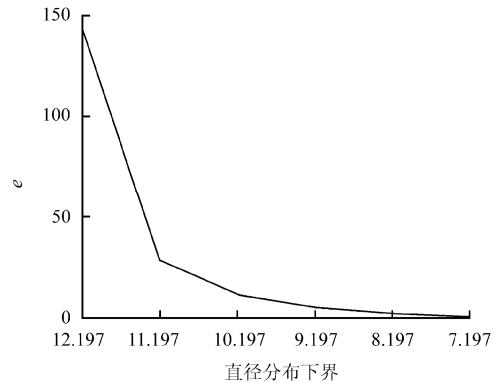


(b) 模拟算例 2

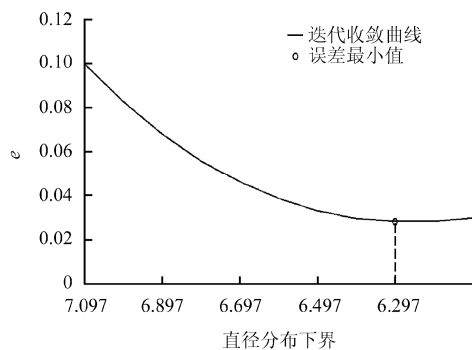
图 6 无限测窗下的迹长概率密度函数拟合曲线
Fig.6 Fitted curves of trace length distribution

4.3 直径分布概率密度函数的获得

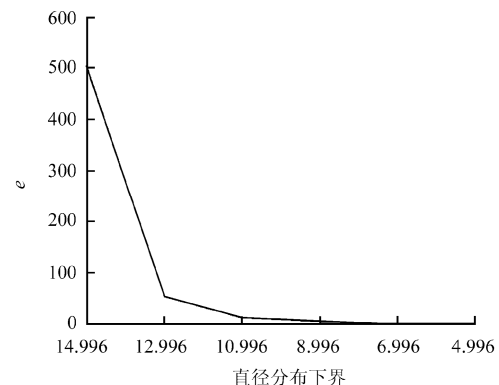
调用 RJNS^{3D} 中直径分布推断函数, 计算出解析解; 调用 RJNS^{3D} 中直径分布定义域推断函数, 采用变步长的搜索方式, 推断出直径分布的定义域; 从而给出直径分布概率密度函数下界。模拟算例在进行直径分布下界推断时的迭代收敛曲线见图 7。



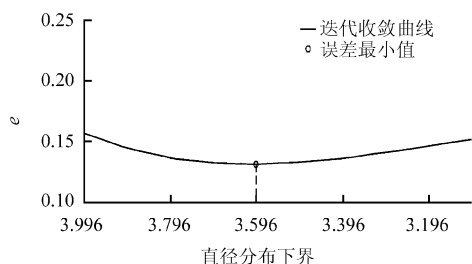
(a) 模拟算例 1 步长为 1 的迭代收敛曲线



(b) 模拟算例 1 步长为 0.1 的迭代收敛曲线



(c) 模拟算例 2 步长为 1 的迭代收敛曲线



(d) 模拟算例 2 步长为 0.1 的迭代收敛曲线

图 7 迭代收敛曲线
Fig.7 Curves of iterative error

根据推断的直径概率密度函数定义域, 计算出直径分布的均值, 给出直径分布概率密度函数的解析解见式 (27)、(28)。式 (27) 为模拟算例 1 的直径概率密度函数解析解。式 (28) 为模拟算例 2 的直径概率密度函数解析解。

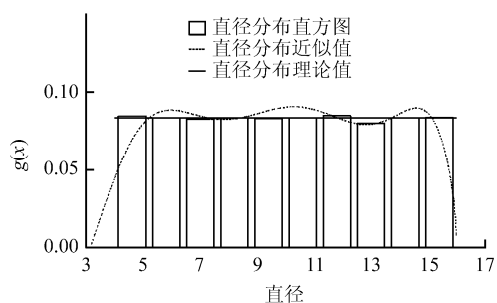
$$g(x) = 3.14x(-5.45 + 0.16\ln(0.901 \times 10^{16} + P) - 0.16\ln x - 0.656 \times 10^{-16}P - 1.43x^2 + 0.0423x^2 \ln(0.901 \times 10^{16} + P) - 0.0423x^2 \ln x - 0.987 \times 10^{-17}x^2P - 0.29 \times 10^{-1}x^4 + 0.853 \times 10^{-3}x^4 \ln(0.901 \times 10^{16} + P) - 0.853 \times 10^{-3}x^4 \ln x - 0.107 \times 10^{-18}x^4P - 0.608 \times 10^{-4}x^6 - 0.179 \times 10^{-5}x^6 \ln x + 0.179 \times 10^{-5}x^6 \ln(0.901 \times 10^{16} + P) - 0.699 \times 10^{-22}P) \quad (27)$$

式中: $P = \sqrt{0.811 \times 10^{32} - 0.317 \times 10^{30}x^2}$ 。

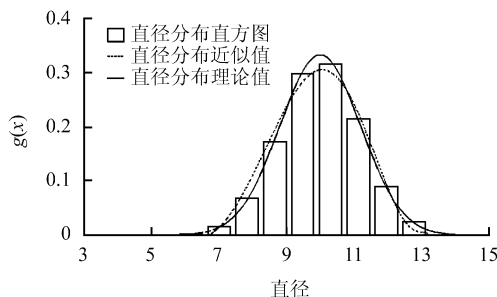
$$g(x) = 3.21x[-9.01 + 0.277\ln(0.186 \times 10^{16} + Q) - 0.277\ln x - 0.528 \times 10^{-15}Q - 2.59x^2 + 0.0795x^2 \cdot \ln(0.186 \times 10^{16} + Q) - 0.0795x^2 \ln x - 0.831 \times 10^{-16}x^2Q - 0.0484x^4 + 0.149 \times 10^{-2}x^4 \ln(0.186 \times 10^{16} + Q) - 0.149 \times 10^{-2}x^4 \ln x - 0.697 \times 10^{-18}x^4Q - 0.491 \times 10^{-4}x^6 - 0.151 \times 10^{-5}x^6 \ln x + 0.151 \times 10^{-5}x^6 \ln(0.186 \times 10^{16} + Q)] \quad (28)$$

式中: $Q = \sqrt{0.345 \times 10^{31} - 0.198 \times 10^{29}x^2}$ 。

绘制推断的直径分布概率密度函数曲线, 模拟区域内的 Poisson 圆盘直径统计直方图以及模拟算例的直径分布概率密度函数理论曲线, 见图 8。



(a) 模拟算例 1



(b) 模拟算例 2

图 8 直径分布概率密度函数推断曲线

Fig.8 Estimated diameter distribution curves

根据 Warburton^[4]提出的计算节理体积密度的公式为

$$\lambda_v = \frac{\lambda}{m \sin \alpha} \quad (29)$$

式中: λ_v 为节理中点体积密度; α 为节理和测窗平面所构成的二面角。

模拟算例 1、2 的节理网络参数推断结果见表 3。

表 3 推断结果对比表

Table 3 Inference results of simulation

算例		直径概率密度函数		迹线中点 面密度	直径 均值	节理中点 体积密度
		区间	区间			
		上界	下界	均值		
1	计算值	15.996	3.196	9.884	2.395	9.897
	理论值	16.000	4.000	10.000	2.500	10.00
2	计算值	13.197	6.697	10.060	2.418	10.075
	理论值	$+\infty$	$-\infty$	10.000	2.500	10.00

根据图 8 和表 3 所列结果, 可直观地看出, 推断出的直径分布概率密度函数曲线与模拟区域内的 Poisson 圆盘直径统计直方图, 以及直径分布概率密度函数理论曲线吻合较好; 误差产生的原因除了迹长分布采用多项式形式与真实分布的逼近误差的影响外, 还由于推断的直径分布概率密度函数由无限测窗下的迹长分布概率密度函数求得, 而无限测窗下的迹长分布是从与测窗相交的未删节迹长获得, 即推断与测窗相交、且产生这些未删节迹长的 Poisson 圆盘的直径; 产生这些未删节迹长的 Poisson 圆盘对应于统计中的“样本”, 模拟区域内的全部的 Poisson 圆盘对应于统计中的“总体”; 由于统计模拟的随机性, “样本”是不可能完全精确的代表“总体”, 因而这种误差是不可避免的; 从图 8 仍可直观地看出本文提出的直径概率密度函数解析公式和直径概率密度函数区间推断方法的适用性。

5 结 论

(1) 本文提出了无限测窗下的迹长分布概率密度函数的多项式形式, 该形式能较好地拟合统计直方图, 从而精确地反映现场实测的迹长分布特征, 通过 Monte Carlo 模拟中验证了该形式的正确性。

(2) 推导了基于多项式形式迹长分布概率密度函数对应的直径分布概率密度函数的解析解, 并采用 Priest 的解析解验证了本文推导的直径分布概率密度函数解析解的正确性。

(3) 依据概率密度函数的性质和推导的直径分布概率密度函数的数学特点, 提出了直径分布概率

密度函数定义域的推断方法。

(4) 采用 Monte Carlo 方法验证本文提出直径分布概率密度函数解析解和直径分布概率密度函数定义域推断方法的适用性,从而给出了节理 Poisson 圆盘直径分布概率密度函数的完整适用的推断方法。

作者在做 Monte Carlo 模拟时,发现一个问题需要进一步地讨论和研究:

Song^[5]提出的有限测窗和无限测窗迹长分布的关系公式(见式(19)),只有在测窗尺度可以涵盖无限测窗意义下最大迹长时,即直径分布概率密度函数定义域的上界,才可以获得完整的迹长,但在实际中,最大迹长往往是未知,如何选用合适的测窗尺度是需要进一步要研究的问题。

参 考 文 献

- [1] BAECHER G B, LANNEY N A, EINSTEIN H H. Statistical description of rock properties and sampling[C]// Proceedings of the 18th U.S. Symposium on Rock Mechanics. Colorado: Colorado School of Mines Press, 1977.
- [2] ROBERTSON A. The interpretation of geologic factors for use in slope theory[C]// Proceedings of Symposium on the Theoretical Background to the Planning of Open Pit Mines, Johannesburg, South Africa: [s. n.], 1970.
- [3] BARTON C M. Geotechnical analysis of rock structure and fabric in CSA Mine NSW[C]// Applied Geomechanics Technical Paper 24, Common Wealth Scientific and Industrial Research Organization. Australia: [s. n.], 1977.
- [4] WARBURTON P M. A stereological interpretation of joint trace data[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences and Geomechanics Abstracts**, 1980, 17(4): 181—190.
- [5] DERSHOWITZ W S, EINSTEIN H H. Characterizing rock joint geometry with joint system models[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 1988, 21(1): 21—51.
- [6] SONG J J, LEE C I. Estimation of joint length distribution using window sampling[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2001, 38(4): 519—528.
- [7] SONG J J. Estimation of a joint diameter distribution by an implicit scheme and interpolation technique[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2006, 43(4): 512—519.
- [8] 梅涛, 杨春和, 王贵宾, 等. 岩体节理大小估算新方法研究[J]. **岩石力学与工程学报**, 2008, 27(增刊 2): 3503—3509.
MEI Tao, YANG Chun-he, WANG Gui-bin, et al. A new method for estimating rock joint size[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(Supp.2): 3503—3509.
- [9] TONON F, CHEN S. Closed-form and numerical solutions for the probability distribution function of fracture diameters[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2007, 44(3): 332—350.
- [10] 邓之录, 梁之舜. 随机点过程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [11] DEUTSCH M, BENIAMINY I. Derivative-free inversion of Abel's integral equation[J]. **Applied Physics Letters**, 1982, 41(1): 41—27.
- [12] PRIEST S D. Determination of discontinuity size distributions from scanline data[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 2004, 37(5): 347—368.
- [13] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 施普林格出版社, 2001.
- [14] 刘晓丽, 王恩志, 王思敬, 等. 裂隙岩体表征方法及岩体水力学特性研究[J]. **岩石力学与工程学报**, 2008, 27(9): 1814—1821.
LIU Xiao-li, WANG En-zhi, WANG Si-jing, et al. Representation method of fractured rock mass and its hydraulic properties study[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2008, 27(9): 1814—1821.
- [15] 于青春, 薛果夫, 陈德基. 裂隙岩体一般块体理论[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007.
- [16] ZHANG L, EINSTEIN H H. Estimating the intensity of rock discontinuities[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2000, 37(5): 819—837.
- [17] MAULDON M. Estimating mean fracture trace length and density from observations in convex windows[J]. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, 1998, 31(4): 201—216.